

BIHAR MATHEMATICAL SOCIETY

TSTM OLYMPIAD (JUNIOR) 2019

Full Marks -100 Answer all questions. All questions carry equal marks. Time: $2\frac{1}{2}$ Hours

1. If $(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2})(1 - \frac{1}{5^2}) \dots \dots \dots (1 - \frac{1}{2019^2}) = \frac{x}{2019}$, then find the value of x .
यदि $(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2})(1 - \frac{1}{5^2}) \dots \dots \dots (1 - \frac{1}{2019^2}) = \frac{x}{2019}$, तो x का मान ज्ञात करें।
2. If $a^x = (x + y + z)^y$, $a^y = (x + y + z)^z$ and $a^z = (x + y + z)^x$ then find the value of $x + y + z$, given that $a \neq 0$.
यदि $a^x = (x + y + z)^y$, $a^y = (x + y + z)^z$ तथा $a^z = (x + y + z)^x$ तो $x + y + z$, का मान ज्ञात करें, जबकि $a \neq 0$.
3. In a right angled triangle, the difference between two acute angle is $(\frac{\pi}{15})^c$. Find the angles in degree.
किसी समकोण त्रिभुज में दोनों न्यून कोणों का अन्तर $(\frac{\pi}{15})^c$ है। कोणों का मान डिग्री में ज्ञात करें।
4. Find natural numbers x, y such that $\sqrt{x} + y = 7$ and $x + \sqrt{y} = 11$.
दो प्रकृतिक संख्या x, y ज्ञात करें जबकि $\sqrt{x} + y = 7$ तथा $x + \sqrt{y} = 11$.
5. If a, b, c are positive numbers such that $abc = 1$, then prove that $a + b + c \geq 3$ and $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$.
यदि a, b, c धनात्मक संख्यायें हैं जबकि $abc = 1$, तो साबित करें कि $a + b + c \geq 3$ तथा $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$.
6. The length of a rectangular sheet of paper is twice its breadth. Show how to cut this paper into three pieces which can be rearranged to form a square.
कागज के एक आयताकार पृष्ठ की लम्बाई उसकी चौड़ाई की दुगुनी है इसे ऐसे तीन टुकड़ों में कैसे काटें कि उन्हें एक वर्ग के आकार में रखा जा सके।
7. If $a^2 + 1 = a$, then find the value of $a^{12} + a^6 + 1$.
यदि $a^2 + 1 = a$ हो तो $a^{12} + a^6 + 1$ का मान ज्ञात करें।
8. If $x = a \sec \theta \cos \phi$, $y = b \sec \theta \sin \phi$, $z = c \tan \theta$ then find the value of $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.
यदि $x = a \sec \theta \cos \phi$, $y = b \sec \theta \sin \phi$, $z = c \tan \theta$ तो $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ का मान ज्ञात करें।
9. Find the digit at the unit place in the number $2019^{2020} + 2020^{2019}$.
संख्या $2019^{2020} + 2020^{2019}$ के इकाई स्थान का अंक ज्ञात करें।
10. A man has 5 friends. In how many ways can he invite one or more of them in a party?
एक व्यक्ति को 5 मित्र हैं। कितने प्रकार से वह उनमें से एक या अधिक को एक पार्टी में आमंत्रित कर सकता है?

BIHAR MATHEMATICAL SOCIETY
TSTM OLYMPIAD (SENIOR) 2019

Full Marks -100 Answer all questions. All questions carry equal marks. Time: $2\frac{1}{2}$ Hours

1. Let a and b be positive real numbers and $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 183$, $a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = 182$. Find $\frac{9}{5}(a + b)$.
मानलिया a तथा b वास्तविक धनात्मक संख्यायें हैं, तथा $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 183$, $a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = 182$. तो $\frac{9}{5}(a + b)$ का मान निकालें।
2. If $2^x = 3^y = 6^{-z}$, then find the value of $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.
यदि $2^x = 3^y = 6^{-z}$, तो $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ का मान निकालें।
3. Let O be the incentre of a triangle ABC and D be a point on the side BC such that $OD \perp BC$. If $\angle BOD = 15^\circ$, then find $\angle ABC$.
मानलिया O त्रिभुज ABC का अन्तःकेन्द्र है तथा भुजा BC पर D एक ऐसा बिन्दु है कि $OD \perp BC$. यदि $\angle BOD = 15^\circ$, तो $\angle ABC$ मान निकालें।
4. What is the sum of the squares of the roots of the equation $x^2 - 7[x] + 5 = 0$, where $[x]$ is the maximum integer less than x ?
यदि $[x]$ अधिकतम पूर्णांक हो, जो x से कम है तो समीकरण $x^2 - 7[x] + 5 = 0$ के मूलों के वर्गों के योग का मान क्या होगा?
5. In a class the numbers of boys and girls are in the ratio 4 : 3. When 8 boys and 174 girls are absent, the number of boys is the square of the number of girls. Find the total number of students in the class.
एक कक्षा में लड़के एवं लड़कियों की संख्याओं का अनुपात 4 : 3 है। यदि 8 लड़के तथा 14 लड़कियाँ अनुपस्थिति हों तो लड़कों की संख्या लड़कियों की संख्या का वर्ग है। कक्षा में कुल विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात करें।
6. Find all real numbers satisfying $x^8 + y^8 = x + y - 6$.
 $x^8 + y^8 = x + y - 6$ को संतुष्ट करने वाले सभी वास्तविक संख्याओं को ज्ञात करें।
7. How many six-digit numbers divisible by 25 can be formed using digits 0, 1, 2, 3, 4, 5 without repetition?
0, 1, 2, 3, 4, 5 को लेकर बिना पुनरावृत्ति के छः अंकों की कितनी संख्या बनायी जा सकती है जो 25 से विभाज्य हो?
8. Find the remainder when 19^{92} is divided by 92.
यदि 19^{92} का 19 से भाग दिया जाय तो भेष का मान ज्ञात करें।
9. Let $ABCD$ be a square. P and Q are any two points on BC and CD respectively such that $AP = 4$ cm, $PQ = 3$ cm, and $AQ = 5$ cm. Find the side of the square.
मानलिया $ABCD$ एक वर्ग है। P तथा Q क्रम 1: BC तथा CD पर दो ऐसे बिन्दु हैं कि $AP = 4$ cm, $PQ = 3$ cm तथा $AQ = 5$ cm, वर्ग की भुजा का मान निकालें।
10. If $(a^2 - b^2)\sin\theta + 2ab \cos\theta = a^2 + b^2$, then find $\tan\theta$.
यदि $(a^2 - b^2)\sin\theta + 2ab \cos\theta = a^2 + b^2$, तो $\tan\theta$ का मान निकालें।